KÜMELER KONUSU SORU VE ÇÖZÜMLERİ

SORULAR

1. A, B, C kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdakileri ispatlayınız.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

c) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

d) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

e) $A \Delta \varnothing = A$,

f) $A \setminus B = B^C \setminus A^C$

g) $A^C \Delta B^C = A \Delta B$,

h) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. A ve B kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdakileri ispatlayınız.

a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$,

b) $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.

3. X, n elemanlı bir küme ise $\mathrm{P}(X)$ kuvvet kümesi 2^n elemanlıdır.

ÇÖZÜMLER

1. a) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

O halde $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $\left[A \cap (B \cup C)\right]^C = A^C \cup (B \cup C)^C = A^C \cup \left(B^C \cap C^C\right) = \left(A^C \cup B^C\right) \cap \left(A^C \cup C^C\right)$

$= (A \cap B)^C \cap (A \cap C)^C = \left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right]^C$

"a" şıkkından ve $\left(A^C\right)^C = A$ özelliğinden $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c)

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\left(A\cap B^C\right)\cup\left(B\cap A^C\right)=\left[\left(A\cap B^C\right)\cup B\right]\cap\left[\left(A\cap B^C\right)\cup A^C\right]$$

$$=\left[(A\cup B)\cap\left(B^C\cup B\right)\right]\cap\left[\left(A\cup A^C\right)\cap\left(A^C\cup B^C\right)\right]=\left[(A\cup B)\cap E\right]\cap\left[E\cap(A\cap B)^C\right]$$

$$=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

d) $(A\Delta B)\Delta C=\left[\left(A\cap B^C\right)\cup\left(B\cap A^C\right)\right]\Delta C$

$$=\left[\left[\left(A\cap B^C\right)\cup\left(B\cap A^C\right)\right]\cap C^C\right]\cup\left[C\cap\left[\left(A\cap B^C\right)\cup\left(B\cap A^C\right)\right]^C\right]$$

$$=\left[\left(A\cap B^C\cap C^C\right)\cup\left(A^C\cap B\cap C^C\right)\right]\cup\left[C\cap\left(A^C\cup B\right)\cap\left(A\cup B^C\right)\right]$$

$$=\left[\left(A\cap B^C\cap C^C\right)\cup\left(A^C\cap B\cap C^C\right)\right]\cup\left[\left[\left(A^C\cap C\right)\cup(B\cap C)\right]\cap\left(A\cup B^C\right)\right]$$

$$=\left(A\cap B^C\cap C^C\right)\cup\left(A^C\cap B\cap C^C\right)\cup\left(A^C\cap B^C\cap C\right)\cup(A\cap B\cap C).$$

Kesişim ve birleşim işlemleri değişme özelliği sağladığından ve yukarıdaki açılıma göre söylenebilir ki $(A\Delta B)\Delta C$ ifadesi her üç değişkene göre değişmelidir. Yani $(A\Delta B)\Delta C=(B\Delta A)\Delta C=(C\Delta A)\Delta B=(A\Delta C)\Delta B=(B\Delta C)\Delta A=(C\Delta B)\Delta A$ sağlanır. Ayrıca simetrik fark işlemi de değişmeli olduğundan $(A\Delta B)\Delta C=(B\Delta A)\Delta C=(C\Delta A)\Delta B=(A\Delta C)\Delta B=(B\Delta C)\Delta A=(C\Delta B)\Delta A$ $=C\Delta(A\Delta B)=C\Delta(B\Delta A)=B\Delta(C\Delta A)=B\Delta(A\Delta C)=A\Delta(B\Delta C)=A\Delta(C\Delta B)$ olur. Sonuç olarak $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$ 'dir.

e) $A\Delta\varnothing=(A\cup\varnothing)\setminus(A\cap\varnothing)=A\setminus\varnothing=A$

f) $B^C\setminus A^C=B^C\cap\left(A^C\right)^C=B^C\cap A=A\setminus B$

g) $A^C\Delta B^C=(A^C\setminus B^C)\cup(B^C\setminus A^C)=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)=A\Delta B$

h) $(x,y)\in(A\cup B)\times C\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge y\in C\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge y\in C$

$(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in C)\Leftrightarrow(x,y)\in A\times C\vee(x,y)\in B\times C$

$\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$

2. **a)** (i) $A\cup B=B$,

(ii) $A\subset B$,

(iii) $A\cap B=A$,

(iv) $A \setminus B = \varnothing$ olsun.

(i)$\Rightarrow$(ii): $A \cup B = B$ kabul edelim ve $A \subset B$ olduğunu ispatlayalım. $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subset B$

(ii)$\Rightarrow$(iii): $A \cap B \subset A$ olduğu açıktır, $A \subset A \cap B$ olduğunu gösterelim. $A \subset B$ olduğundan iki tarafı A ile kesiştirirsek kesişim içermeyi koruduğundan $A \cap A \subset A \cap B$ olur. O halde $A \subset A \cap B$ 'dir. Yani $A \cap B = A$ sağlanır.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Aksini varsayalım. $A \setminus B \neq \varnothing$ olsun. O halde $x \in A \wedge x \notin B$ koşulunu sağlayan bir x vardır. $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$ çelişkisi elde edilir. O halde $A \setminus B = \varnothing$ 'dur.

(iv)$\Rightarrow$(i): $A \setminus B = \varnothing \Rightarrow (A \setminus B) \cup B = \varnothing \cup B \Rightarrow A \cup B = B$.

b)

$A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing \wedge B \setminus A = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

3. Tümevarım yöntemi ile ispatlayalım.

$n = 0 \Rightarrow X = \varnothing \Rightarrow \mathrm{P}(X) = \{\varnothing\} \Rightarrow |\mathrm{P}(X)| = 1 = 2^0$,

$n = 1 \Rightarrow X = \{a\} \Rightarrow \mathrm{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}\} \Rightarrow |\mathrm{P}(X)| = 2 = 2^1$ (Buradaki $|A|$ gösterimi, A kümesinin eleman sayısı anlamındadır.)

Şimdi n için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani $|X| = n \Rightarrow |\mathrm{P}(X)| = 2^n$ olsun. $n+1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim. Genelliği kaybetmeden $X = \{1, 2, ..., n, n+1\}$ varsayabiliriz. X 'in iki tür alt kümeleri vardır. Birincisi $n+1$'i içeren alt kümeler, ikincisi $n+1$'i içermeyen alt kümeler. Başka da alt kümesi yoktur. Tümevarım hipotezine göre X 'in $n+1$'i içermeyen (ikinci tür) alt kümelerinin sayısı 2^n 'dir. Şimdi X 'in $n+1$'i içeren alt kümelerini inceleyelim. A, X 'in $n+1$'i içeren bir alt kümesi ise B, X 'in $n+1$'i içermeyen bir alt kümesi olmak üzere $A = B \cup \{n+1\}$ biçiminde olmalıdır. O halde X 'in $n+1$'i içeren alt kümeleri ile içeren alt kümeleri arasında birebir bir eşleme vardır. Yani eleman sayıları eşittir. Demek ki X 'in birinci tür alt kümeleri 2^n tanedir. O halde $|\mathrm{P}(X)| = 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$ 'dir.