İSPAT:

i) Önce, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|\geq 0$ olduğunu gösterelim. $x\geq 0$ ise $|x|=x\geq 0$ olur. $x<0$ ise $|x|=-x>0$ olur. Dolayısıyla $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|\geq 0$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|-x|=|x|$ olduğunu gösterelim. $x=0$ ise $|-0|=0=|0|$. $x>0$ ise $-x<0$'dır. Buna göre $|x|=x$ ve $|-x|=-(-x)=x$ olacağından $|-x|=|x|$ sağlanır. $x<0$ ise $-x>0$'dır. Buna göre $|x|=-x$ ve $|-x|=-x$ olacağından $|-x|=|x|$ sağlanır.

ii) $x=0$ ise mutlak değerin tanımından $|x|=0$ olduğu açıktır. $|x|=0$ olsun. Yine mutlak değerin tanımından $x>0\vee x<0$ ise $|x|>0$ olduğu elde ediliyor. Yani $|x|=0$ olduğunda $x=0$ olmak zorundadır.

iii) Önce $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\leq|x|$ olduğunu gösterelim:

$x\geq 0\Rightarrow x=|x|$,

$x<0\Rightarrow -x>0\Rightarrow x<-x=|x|$.

Şimdi $\forall x\in\mathbb{R}$, $-x\leq|x|$ olduğunu gösterelim:

$x\geq 0\Rightarrow -x\leq 0\Rightarrow -x\leq x=|x|$,

$x<0\Rightarrow -x>0\Rightarrow -x=|x|$.

iv) $a,b\in\mathbb{R}$ olsun. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ olduğunu ispatlayalım:

$a,b\geq 0\Rightarrow a\cdot b\geq 0\Rightarrow |a\cdot b|=a\cdot b=|a|\cdot|b|$,

$a\geq 0\wedge b<0\Rightarrow a\cdot b\leq 0\Rightarrow |a\cdot b|=-a\cdot b=a\cdot(-b)=|a|\cdot|b|$,

$a<0\wedge b\geq 0\Rightarrow a\cdot b\leq 0\Rightarrow |a\cdot b|=-a\cdot b=(-a)\cdot b=|a|\cdot|b|$,

$a,b<0\Rightarrow a\cdot b>0\Rightarrow |a\cdot b|=a\cdot b=(-a)\cdot(-b)=|a|\cdot|b|$.

Şimdi $b\neq 0$ olmak üzere $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ olduğunu ispatlayalım:

$a\geq 0\wedge b>0\Rightarrow \frac{a}{b}\geq 0\Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{a}{b}=\frac{|a|}{|b|}$,

$$a \geq 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|},$$

$$a \leq 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|},$$

$$a \leq 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}.$$

v) $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Önce $|a+b| \leq |a| + |b|$ olduğunu gösterelim:

$a+b \geq 0$ ise $|a+b| = a+b$. (iii) ile $a \leq |a| \wedge b \leq |b|$ olduğundan $|a+b| = a+b \leq |a| + |b|$,

$a+b < 0$ ise $|a+b| = -a-b$. (iii) ile $-a \leq |a| \wedge -b \leq |b|$ olduğundan $|a+b| = -a-b \leq |a| + |b|$.

Şimdi $|a-b| \leq |a| + |b|$ olduğunu gösterelim:

$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$

vi) $|a| \geq |b|$ olsun. O halde $\big||a| - |b|\big| = |a| - |b|$

$\Rightarrow |a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b| \Rightarrow \big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

$|a| < |b|$ olsun. O halde $\big||a| - |b|\big| = |b| - |a|$

$\Rightarrow |b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |b-a| = |a-b| \Rightarrow \big||b| - |a|\big| = \big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

vii) $x \geq 0$ olmak üzere $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ olduğunu ispatlayalım:

$"\Rightarrow"$ $|x| < r$ olsun. O halde $x < r$. $-r < 0 \leq x$ olduğundan $-r < x$. Dolayısıyla $-r < x < r$.

$"\Leftarrow"$ $-r < x < r$ olsun. $|x| = x < r$.

Şimdi $x < 0$ olmak üzere $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ olduğunu ispatlayalım:

$"\Rightarrow"$ $|x| < r$ olsun. O halde $-x < r \Rightarrow -r < x$. $x < 0 < r$ olduğundan $x < r$. Dolayısıyla $-r < x < r$.

$"\Leftarrow"$ $-r < x < r$ olsun. O halde $-x < r \Rightarrow |x| = -x < r$.

(**viii**)'in ispatı (**vii**)'nin ispatı ile tamamen benzerdir. (**viii**) önermesini $p \Leftrightarrow q$ olarak alırsak (**ix**) önermesi $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ olacağından (**ix**) ispatlanmış olur. Benzer şekilde, (**vii**) önermesini $p \Leftrightarrow q$ olarak alırsak (**x**) önermesi $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ olacağından (**x**) da ispatlanmış olur.