

İSPAT:

a) Önce, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ olduğunu gösterelim. $x \geq 0$ ise $|x| = x \geq 0$ olur. $x < 0$ ise $|x| = -x > 0$ olur. Dolayısıyla $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$ olduğunu gösterelim. $x = 0$ ise $|-0| = 0 = |0|$. $x > 0$ ise $-x < 0$ 'dir. Buna göre $|x| = x$ ve $|-x| = -(-x) = x$ olacağından $|-x| = |x|$ sağlanır. $x < 0$ ise $-x > 0$ 'dir. Buna göre $|x| = -x$ ve $|-x| = -x$ olacağından $|-x| = |x|$ sağlanır.

b) $x = 0$ ise mutlak değerin tanımından $|x| = 0$ olduğu açıktır. $|x| = 0$ olsun. Yine mutlak değerin tanımından $x > 0 \vee x < 0$ ise $|x| > 0$ olduğu elde ediliyor. Yani $|x| = 0$ olduğunda $x = 0$ olmak zorundadır.

c) Önce $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$ olduğunu gösterelim:

$$x \geq 0 \Rightarrow x = |x|,$$

$$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < -x = |x|.$$

Şimdi $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \leq |x|$ olduğunu gösterelim:

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow -x \leq x = |x|,$$

$$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow -x = |x|.$$

d) $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ olduğunu ispatlayalım:

$$a, b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0 \Rightarrow |a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|,$$

$$a \geq 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0 \Rightarrow |a \cdot b| = -a \cdot b = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|,$$

$$a < 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0 \Rightarrow |a \cdot b| = -a \cdot b = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b|,$$

$$a, b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0 \Rightarrow |a \cdot b| = a \cdot b = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|.$$

Şimdi $b \neq 0$ olmak üzere $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ olduğunu ispatlayalım:

$$a \geq 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|},$$

$$a \geq 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|},$$

$$a \leq 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|},$$

$$a \leq 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}.$$

e) $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Önce $|a+b| \leq |a|+|b|$ olduğunu gösterelim:

$a+b \geq 0$ ise $|a+b| = a+b$. (c) ile $a \leq |a| \wedge b \leq |b|$ olduğundan $|a+b| = a+b \leq |a|+|b|$,

$a+b < 0$ ise $|a+b| = -a-b$. (c) ile $-a \leq |a| \wedge -b \leq |b|$ olduğundan $|a+b| = -a-b \leq |a|+|b|$.

Şimdi $|a-b| \leq |a|+|b|$ olduğunu gösterelim:

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b|.$$

f) Genelliği kaybetmeden $|a| \geq |b|$ varsayabiliriz. O halde $\|a\|-|b\| = |a|-|b|$ elde edilir.

Buradan $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b| \Rightarrow \|a\|-|b\| \leq |a-b|$ bulunur.

g) $x \geq 0$ olmak üzere $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ olduğunu ispatlayalım:

" \Rightarrow " $|x| < r$ olsun. O halde $x < r$. $-r < 0 \leq x$ olduğundan $-r < x$. Dolayısıyla $-r < x < r$.

" \Leftarrow " $-r < x < r$ olsun. $|x| = x < r$.

Şimdi $x < 0$ olmak üzere $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ olduğunu ispatlayalım:

" \Rightarrow " $|x| < r$ olsun. O halde $-x < r \Rightarrow -r < x$. $x < 0 < r$ olduğundan $x < r$. Dolayısıyla $-r < x < r$.

" \Leftarrow " $-r < x < r$ olsun. O halde $-x < r \Rightarrow |x| = -x < r$.

(h)'in ispatı (g)'nin ispatı ile tamamen benzerdir. (h) önermesini $p \Leftrightarrow q$ olarak alırsak (i) önermesi $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ olacağından (i) ispatlanmış olur. Benzer şekilde, (g) önermesini $p \Leftrightarrow q$ olarak alırsak (j) önermesi $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ olacağından (j) da ispatlanmış olur.