

İSPAT: Aksini varsayalım. $m > n$ olsun. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bir taban olduğundan $B = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümesinin her elemanı bu tabanın lineer kombinasyonu biçiminde gösterilebilir:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1^{(1)}x_1 + c_2^{(1)}x_2 + \dots + c_n^{(1)}x_n \quad (1) \\ y_2 &= c_1^{(2)}x_1 + c_2^{(2)}x_2 + \dots + c_n^{(2)}x_n \quad (2) \\ y_3 &= c_1^{(3)}x_1 + c_2^{(3)}x_2 + \dots + c_n^{(3)}x_n \quad (3) \\ &\vdots \\ y_n &= c_1^{(n)}x_1 + c_2^{(n)}x_2 + \dots + c_n^{(n)}x_n \quad (n) \\ y_{n+1} &= c_1^{(n+1)}x_1 + c_2^{(n+1)}x_2 + \dots + c_n^{(n+1)}x_n \quad (n+1) \\ &\vdots \\ y_m &= c_1^{(m)}x_1 + c_2^{(m)}x_2 + \dots + c_n^{(m)}x_n \quad (m) \end{aligned}$$

B kümesi lineer bağımsız olduğundan $y_1 \neq \theta$ 'dır. (Çünkü $y_1 = \theta$ olsaydı, B lineer bağımlı olurdu) Buna göre $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)}$ katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. $c_1^{(1)} \neq 0$ varsaymak genelliği bozmaz. Çünkü sıfırdan farklı olan katsayı $c_1^{(1)}$ değil de başka bir tanesi olsaydı $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)}$ dizilişinde sıfırdan farklı olanı en başa getirip yeniden numaralayabilirdik. Buna göre (1) denklemi

$$x_1 = \frac{1}{c_1^{(1)}} y_1 - \frac{c_2^{(1)}}{c_1^{(1)}} x_2 - \dots - \frac{c_n^{(1)}}{c_1^{(1)}} x_n \quad (*)$$

halini alır. Bu değer (2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_2 = \frac{c_1^{(2)}}{c_1^{(1)}} y_1 + \left(c_2^{(2)} - \frac{c_1^{(2)} c_2^{(1)}}{c_1^{(1)}} \right) x_2 + \dots + \left(c_n^{(2)} - \frac{c_1^{(2)} c_n^{(1)}}{c_1^{(1)}} \right) x_n$$

elde edilir. Bu gösterimi basitleştirmek için katsayıları düzenleyelim:

$$y_2 = d_1 y_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n .$$

d_2, d_3, \dots, d_n katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. Çünkü hepsi sıfır olsaydı $\{y_1, y_2\}$ lineer bağımlı olurdu. Yine benzer biçimde sıfırdan farklı olan katsayıyı d_2 kabul edebiliriz.

Buradan:

$$x_2 = -\frac{d_1}{d_2} y_1 + \frac{1}{d_2} y_2 - \frac{d_3}{d_2} x_3 - \dots - \frac{d_n}{d_2} x_n \quad (**)$$

Bu değer (*) denkleminde yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$x_1 = e_1 y_1 + e_2 y_2 + \dots + e_n x_n \quad (***)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. (**) ve (***) denklemleri (3) denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$y_3 = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 x_3 + \dots + f_n x_n$$

biçiminde bir denklem elde edilir. $\{y_1, y_2, y_3\}$ lineer bağımsız olduğundan f_3, f_4, \dots, f_n 'lerin hepsi birden sıfır olamaz. Varsayalım ki f_3 sıfırdan farklıdır.

Yine benzer yöntemler kullanarak,

$$y_4 = g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3 + g_4 x_4 + \dots + f_n x_n$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu süreç, bu şekilde devam ettirilirse son olarak,

$$y_{n+1} = h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3 + \dots + h_n y_n$$

şeklinde bir denkleme ulaşılır. y_{n+1} vektörü y_1, y_2, \dots, y_n vektörlerinin lineer kombinasyonu biçiminde yazıldığından $\{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ lineer bağımlıdır. Bu ise çelişkidir. Çünkü $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_m\}$ lineer bağımsız demiştik. $\{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\} \subset B$ 'dir. Lineer bağımsız bir kümenin hiçbir altkümesi lineer bağımlı olamaz. Dolayısıyla $m > n$ varsayımımız yanlıştır. Buna göre $m \leq n$ olmalıdır.