İSPAT

i) $"\Rightarrow"$ $\sup X = L$ olsun. $\forall x \in X$, $x \leq L$ olduğundan (a) açıktır. Şimdi (b)'yi ispatlamak için aksini varsayalım. $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in X$, $x \leq L - \varepsilon$ olsun. Buna göre $L - \varepsilon$ sayısı X 'in bir üst sınırı olur ve $L - \varepsilon < L$ sağlanır. Fakat bu olamaz. Çünkü $\sup X = L$ olduğuna göre X 'in L'den küçük bir üst sınırı yoktur. Buna göre varsayım yanlıştır. (b) doğrudur.

$"\Leftarrow"$ (a) ve (b) doğru olsun. L sayısının X 'in üst sınırlarının en küçüğü olduğunu gösterelim. (a)'dan $\forall x \in X$, $x \leq L$ olduğundan L, X 'in bir üst sınırıdır. Şimdi L'nin üst sınırların en küçüğü olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. Varsayalım ki t, X 'in L'den daha küçük bir üst sınırıdır. Buna göre $L - t > 0$'dır. $\varepsilon = L - t > 0$ seçelim. (b)'ye göre $\exists x_\varepsilon \in X$: $L - \varepsilon < x_\varepsilon$ olur. $\varepsilon = L - t$ değerini yerine yazalım. $L - (L - t) < x_\varepsilon \Rightarrow t < x_\varepsilon$. Bu ise t'nin bir üst sınır olması ile çelişir. Demek ki X 'in t'den küçük bir üst sınırı yoktur. Buna göre L, X 'in üst sınırlarının en küçüğüdür.

ii) $"\Rightarrow"$ $\inf X = l$ olsun. $\forall x \in X$, $l \leq x$ olduğundan (a) açıktır. Şimdi (b)'yi ispatlamak için aksini varsayalım. $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in X$, $l + \varepsilon \leq x$ olsun. Buna göre $l + \varepsilon$ sayısı X 'in bir alt sınırı olur ve $l < l + \varepsilon$ sağlanır. Fakat bu olamaz. Çünkü $\inf X = l$ olduğuna göre X 'in l'den büyük bir alt sınırı yoktur. Buna göre varsayım yanlıştır. (b) doğrudur.

$"\Leftarrow"$ (a) ve (b) doğru olsun. l sayısının X 'in alt sınırlarının en büyüğü olduğunu gösterelim. (a)'dan $\forall x \in X$, $l \leq x$ olduğundan l, X 'in bir alt sınırıdır. Şimdi l'nin alt sınırların en büyüğü olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. Varsayalım ki t, X 'in l'den daha büyük bir alt sınırıdır. Buna göre $t - l > 0$'dır. $\varepsilon = t - l > 0$ seçelim. (b)'ye göre $\exists x_\varepsilon \in X$: $x_\varepsilon < l + \varepsilon$ olur. $\varepsilon = t - l$ değerini yerine yazalım. $x_\varepsilon < l + (t - l) \Rightarrow x_\varepsilon < t$. Bu ise t'nin bir alt sınır olması ile çelişir. Demek ki X 'in t'den büyük bir alt sınırı yoktur. Buna göre l, X 'in alt sınırlarının en büyüğüdür.