İSPAT: $T=\{B\subset X \mid B$ lineer bağımsız ve $A\subset B\}\subset \mathrm{P}(X)$ kümeler ailesini tanımlayalım. $A\in T$ olduğundan $T\neq\varnothing$'dur.

$R\subset T\times T$ bağıntısını $(B,B')\in R \Leftrightarrow B\subset B'$ olarak tanımlayalım.

1) $\forall B\in T,\ B\subset B$ olduğundan R yansıyan,
2) $B\subset B'\wedge B'\subset B\Rightarrow B=B'$ olduğundan R ters simetrik,
3) $B\subset B'\wedge B'\subset B''\Rightarrow B\subset B''$ olduğundan R geçişkendir. Dolayısıyla R bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

I bir indis kümesi olmak üzere $\{B_i\}_{i\in I}\subset T$ bir zincir olsun. O halde $i_1,i_2\in I$ ise $B_{i_1}\subset B_{i_2}$ veya $B_{i_2}\subset B_{i_1}$'dir. Ayrıca $\forall i\in I,\ B_i\in T$ olduğundan B_i lineer bağımsızdır ve A'yı kapsar.

$B=\bigcup_{i\in I}B_i$ tanımlayalım. $\forall i\in I,\ A\subset B_i$ olduğundan $A\subset B$'dir. Şimdi B'nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. B kümesinin sonlu veya sonsuz olduğunu bilmiyoruz. Bu yüzden herhangi sonlu altkümesinin lineer bağımsız olduğunu göstermemiz gerekmektedir. $b_1,b_2,\ldots,b_n\in B$ olsun. $\forall k=\overline{1,n}$ için $\exists i_k\in I: b_k\in B_{i_k}$. Şimdi $B_{i_1},B_{i_2},\ldots B_{i_n}$ kümelerini ele alalım. Bu kümeler $\{B_i\}_{i\in I}$'nın elemanlarıdır. $\{B_i\}_{i\in I}$ bir zincir olduğundan bu kümelerin en büyüğü (en genişi) vardır. Bu kümelerin en büyüğü B_{i_n} olsun. (En büyük küme B_{i_n} olmasa bile kümeleri yeniden indisleyerek en büyük kümenin B_{i_n} olmasını sağlayabiliriz) Buna göre $\forall k=\overline{1,n}$ için $B_{i_k}\subset B_{i_n}$, yani, $b_1,b_2,\ldots,b_n\in B_{i_n}$ olur. B_{i_n} lineer bağımsız olduğundan $b_1,b_2,\ldots,b_n$ de lineer bağımsız olur. O halde B'nin her sonlu alt kümesi lineer bağımsız olduğundan B de lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $B\in T$ ve $\forall i\in I,\ B_i\subset B$ olur. Sonuç olarak T'nin her alt zincirinin bir $B\in T$ üst sınırı vardır. O halde Zorn Lemmasına göre T'nin bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal elemanı B^* ile gösterelim. $B^*\in T$ olduğundan $A\subset B^*$ ve B^* lineer bağımsızdır. $spanB^*=X$ olduğunu gösterirsek ispat biter.

Aksini varsayalım. $spanB^*\neq X$ olsun. O halde $\exists x\in X: x\notin spanB^*$.

$x\notin spanB^*$ olduğundan $x\notin B^*$ dir. $B'=B^*\cup\{x\}$ tanımlayalım.

İDDİA: B' lineer bağımsızdır.

Bu iddiayı ispatlamak için B' kümesinin her sonlu altkümesinin lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. B' kümesinin iki türlü sonlu altkümesi vardır.

Birincisi "x" elemanını içermeyen sonlu altkümeler. Bu şekilde sonlu altkümeler, B^* maksimal elemanının da altkümesi olduğundan ve B^* lineer bağımsız olduğundan lineer bağımsızdır.

İkincisi "x" elemanını içeren sonlu altkümeler. Bu biçimde bir alt küme $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B^*$ olmak üzere $\{x, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ biçimindedir. Şimdi $\{x, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu ispatlayalım. $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$ olsun.

$$c_0 x + c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n = \theta \text{ (*) yazalım.}$$

$c_0 \neq 0$ olsaydı $x = -\frac{c_1}{c_0} b_1 - \frac{c_2}{c_0} b_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_0} b_n$, yani, $x \in spanB^*$ olurdu. Bu olamayacağından $c_0 = 0$ olur. Bu değeri (*) denkleminde yerine yazarsak

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_n b_n = \theta$$

elde edilir. $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B^*$ ve B^* lineer bağımsız olduğundan $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\{x, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ sonlu altkümesi de lineer bağımsızdır. B' kümesinin her sonlu altkümesi lineer bağımsız olduğundan kendisi de lineer bağımsızdır. İddia ispatlandı.

B' kümesinin lineer bağımsız olması bir çelişkidir. Çünkü B^* maksimal lineer bağımsız kümedir. Yani B^*'dan daha geniş bir lineer bağımsız küme olamaz. Buna göre varsayımımız olan $spanB^* \neq X$ önermesi yanlıştır. Demek ki $spanB^* = X$ olmalıdır. Bu ise bize B^*'ın A'yı içeren bir taban olduğunu gösterir.

İspat bitti.