İSPAT:

a) Birleşim işleminin özelliğinden $\forall k \in I, A_k \subset \bigcup_{i \in I} A_i$'dir. Önerme1'den $\forall k \in I, f(A_k) \subset f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ elde edilir. O halde yine birleşimin özelliğinden $\bigcup_{i \in I} f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ bulunur. Tersini ispatlayalım. $y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ olsun. Buradan $\exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i : f(x) = y$ elde edilir. O halde $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olduğundan $\exists k \in I : x \in A_k$ ve dolayısıyla $f(x) \in f(A_k)$'dır. $f(A_k) \subset \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ olduğundan $f(x) \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ yani, $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ elde edilir. Sonuç olarak $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ bulunur. İki küme de birbirinin alt kümesi olduğundan $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ önermesi ispatlanmış olur.

b) Kesişim işleminin özelliğinden $\forall k \in I, \bigcap_{i \in I} A_i \subset A_k$'dır. Önerme1'den $\forall k \in I, f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset f(A_k)$ elde edilir. O halde yine kesişimin özelliğinden $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ bulunur.

c) $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \Leftrightarrow \exists k \in \Lambda : f(x) \in B_k \Leftrightarrow \exists k \in \Lambda : x \in f^{-1}(B_k)$ $\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$. Dolayısıyla $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$.

d) $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \Leftrightarrow \forall k \in \Lambda : f(x) \in B_k \Leftrightarrow \forall k \in \Lambda : x \in f^{-1}(B_k)$ $\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$. Dolayısıyla $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$.