

**İSPAT:**  $x \in X$  olsun.  $\text{span}A = X$  olduğundan  $\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in K$  ve  $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ :

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

Şimdi bu gösterimin tek olduğunu gösterelim: Varsayalım ki  $x$  elemanı,  $d_1, d_2, \dots, d_m \in K$  ve  $y_1, y_2, \dots, y_m \in A$  olmak üzere,

$$x = d_1y_1 + d_2y_2 + \dots + d_my_m \quad (2)$$

biçiminde bir gösterime daha sahip olsun.

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  olsun.  $S$  kümesini  $S = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  biçiminde gösterelim.  $1 \leq i \leq k$  olmak üzere  $z_i$ 'ler  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'lerden veya  $y_1, y_2, \dots, y_m$ 'lerden biridir. Buna göre (1) gösterimini ve (2) gösterimini tekrar yazalım:

$$x = e_1z_1 + e_2z_2 + \dots + e_kz_k \quad (1)$$

$$x = f_1z_1 + f_2z_2 + \dots + f_kz_k \quad (2)$$

Burada, (1) gösteriminde  $z_i$ 'ler  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'lerden biri ise  $e_i = c_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ),  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'lerden biri değilse  $e_i = 0$ , (2) gösteriminde ise  $z_i$ 'ler  $y_1, y_2, \dots, y_m$ 'lerden biri ise  $f_i = d_l$  ( $1 \leq l \leq m$ ),  $y_1, y_2, \dots, y_m$ 'lerden biri değilse  $f_i = 0$ 'dır. Buradan,

$$e_1z_1 + e_2z_2 + \dots + e_kz_k = f_1z_1 + f_2z_2 + \dots + f_kz_k$$

$$\Rightarrow (e_1 - f_1)z_1 + (e_2 - f_2)z_2 + \dots + (e_k - f_k)z_k = \theta.$$

$A$  lineer bağımsız ve  $S \subset A$  olduğundan  $S$  de lineer bağımsızdır. O halde

$\forall i = \overline{1, k}$  için  $e_i - f_i = 0 \Rightarrow \forall i = \overline{1, k}$  için  $e_i = f_i$ . Dolayısıyla (1) gösterimi taktır.