

İSPAT:

a) Varsayalım ki iki tane olsun. Yani $\exists \theta, \theta' \in X : \forall x \in X$,

$$x + \theta = x \quad (1)$$

ve

$$x + \theta' = x \quad (2)$$

(1) eşitliği X 'in her elemanı için sağlandığından $x = \theta'$ alırsak $\theta' + \theta = \theta'$ olur. Benzer şekilde (2) eşitliği X 'in her elemanı için sağlandığından $x = \theta$ alırsak $\theta + \theta' = \theta$ olur. O halde

$$\theta = \theta + \theta' = \theta' + \theta = \theta'$$

b) Varsayalım ki iki tane olsun. Yani $\exists y, y' \in X : x + y = x + y' = \theta$. O halde

$$y = y + \theta = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = \theta + y'$$

c) $0x = (0+0)x = 0x + 0x$ sağlanır. $0x \in X$ olduğundan $0x$ 'in toplamaya göre tersi $-0x$ vardır. $-0x$ 'i ilk eşitliğin her iki yanına eklersek:

$$0x + (-0x) = (0x + 0x) + (-0x) \Rightarrow \theta = 0x + (0x + (-0x)) \Rightarrow \theta = 0x + \theta \Rightarrow 0x = \theta.$$

$$\text{d) } \lambda\theta = \lambda(\theta + \theta) = \lambda\theta + \lambda\theta \Rightarrow \lambda\theta + (-\lambda\theta) = (\lambda\theta + \lambda\theta) + (-\lambda\theta)$$

$$\Rightarrow \theta = \lambda\theta + (\lambda\theta + (-\lambda\theta)) \Rightarrow \theta = \lambda\theta + \theta \Rightarrow \lambda\theta = \theta$$

$$\text{e) } 0x = \theta \Rightarrow (1 + (-1))x = \theta \Rightarrow x + (-1)x = \theta \Rightarrow (-1)x = -x$$

f) " \Rightarrow ": $\lambda x = \theta$ olsun. $\lambda = 0 \vee x = \theta$ olduğunu ispatlayacağız. $\lambda = 0$ olduğu durumda ispatlayacak bir şey yoktur, çünkü istenen sağlanır. $\lambda \neq 0$ olduğu durumda $x = \theta$ olduğunu ispatlarsak ispat biter. $\lambda \neq 0$ ve K bir cisim olduğundan $\lambda^{-1} \in K$ vardır. $\lambda x = \theta$ eşitliğinin iki tarafını λ^{-1} ile çarparsak $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}\theta \Rightarrow (\lambda^{-1}\lambda)x = \theta \Rightarrow x = \theta$

" \Leftarrow ": $\lambda = 0 \vee x = \theta$ ise (c) ve (d) şıklarından $\lambda x = \theta$ olduğu elde edilir.