İSPAT:

1. Varsayalım ki 2 tane sıfır elemanı vardır. Bu sıfırları 0 ve $0'$ ile gösterelim. O halde,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x+0=x \tag{1.1}$$

ve

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x+0'=x \tag{1.2}$$

(1.1) eşitliği her bir x elemanı için sağlandığından $x=0'$ alınabilir. Buna göre (1.1) denklemi

$$0'+0=0'$$

halini alır. Benzer şekilde (1.2) eşitliğinde de $x=0$ alınırsa bu eşitlik

$$0+0'=0$$

halini alır. Dolayısıyla bu son iki eşitlikten $0=0'$ elde edilir.

2. $x \in \mathbb{R}$ keyfi olsun. y ve y' elemanları x'in toplamaya göre iki tersi olsun. O halde, $x+y=x+y'=0$ olur. Dolayısıyla,

$y'=y'+0=y'+(x+y)=(y'+x)+y=0+y=y$ elde edilir.

3. $x+a=b$ denkleminde eşitliğin iki tarafına $-a$ eklenirse

$(x+a)+(-a)=b+(-a) \Leftrightarrow x+(a+(-a))=b+(-a) \Leftrightarrow x+0=b+(-a) \Leftrightarrow x=b+(-a)=b-a$ elde edilir. Bu da $x+a=b$ denleminin tek çözümünün $b-a$ olduğunu gösterir.

4. Varsayalım ki 2 tane birim eleman vardır. Bunları 1 ve $1'$ ile gösterelim. O halde,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot 1=x \tag{2.1}$$

ve

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot 1'=x \tag{2.2}$$

(1)'dekine bezer biçimde (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden $1' \cdot 1=1'$ ve $1 \cdot 1'=1$ elde edilir. Buradan da $1'=1$ olduğu görülür.

5. $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ keyfi olsun. b ve b' sayıları a'nın çarpmaya göre iki tersi olsun. O halde $a \cdot b=a \cdot b'=1$ olur. Dolayısıyla,

$b'=b' \cdot 1=b' \cdot (a \cdot b)=(b' \cdot a) \cdot b=1 \cdot b=b$ elde edilir.

6. $a \cdot x=b$ denkleminde eşitliğin iki tarafı a^{-1} ile çarpılırsa

$a^{-1} \cdot (a \cdot x)=a^{-1} \cdot b \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot x=a^{-1} \cdot b \Rightarrow 1 \cdot x=a^{-1} \cdot b \Rightarrow x=a^{-1} \cdot b=b \cdot \frac{1}{a}=\frac{b}{a}$ elde edilir. Bu ise $a \cdot x=b$ denklemin tek çözümünün $\frac{b}{a}$ olduğunu gösterir.

7. $a\in\mathbb{R}$ keyfi olsun. $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0\Rightarrow a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0$. Son eşitliğe her iki taraftan $-a\cdot 0$ eklenirse

$a\cdot 0+(-a\cdot 0)=(a\cdot 0+a\cdot 0)+(-a\cdot 0)\Rightarrow 0=a\cdot 0+\left(a\cdot 0+(-a\cdot 0)\right)\Rightarrow 0=a\cdot 0+0\Rightarrow a\cdot 0=0$

elde edilir.

8. $a,b\in\mathbb{R}$ için $ab=0$ olsun. $a\neq 0\Rightarrow b=0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü $a=0$ ise problem çözülmüş olur. $a\neq 0$ ise b'nin sıfır olduğunu göstermek gereklidir. Şimdi $a\neq 0\Rightarrow b=0$ olduğunu gösterelim:

$a\neq 0$ olduğuna göre II_4'e göre a^{-1} vardır. $ab=0$ eşitliğinde iki tarafı a^{-1} ile çarpalım:

$a^{-1}(ab)=a^{-1}0=0\Rightarrow\left(a^{-1}a\right)b=0\Rightarrow 1b=0\Rightarrow b=0$.

9. $a\in\mathbb{R}$ keyfi olsun. $0a=0\Rightarrow\left(1+(-1)\right)a=0\Rightarrow 1a+(-1)a=0\Rightarrow a+(-1)a=0$. Son eşitliğin iki tarafına $-a$ eklersek $(-1)a=-a$ elde edilir.

10. Önce $-(-a)=a$ olduğunu, yani, bir reel sayının tersinin tersinin kendisine eşit olduğunu ispatlayalım:

$b=-a$ dersek $a+b=a+(-a)=0$ olduğundan a sayısı b'nin toplamaya göre tersidir. Yani $a=-b=-(-a)$ elde edilir. Buna göre **(9)**'dan,

$(-1)(-a)=-(-a)=a$.

11. $a\in\mathbb{R}\Rightarrow(-a)(-a)=\left((-1)a\right)\left((-1)a\right)=(-1)(-1)aa=1aa=aa=a^2$

12. $a<b\wedge b\leq c\Rightarrow a<b\wedge(b=c\vee b<c)\Rightarrow(a<b\wedge b=c)\vee(a<b\wedge b<c)$

$\Rightarrow a<c\vee a<c\Rightarrow a<c$ elde edilir. $a\leq b\wedge b<c\Rightarrow a<c$ ve $a\leq b\wedge b\leq c\Rightarrow a\leq c$ benzer biçimde ispatlanır.

13. $0<a$ keyfi olsun. IV_2 ile eşitsizliğin iki tarafına $-a$ ekleyebiliriz.

$(-a)+0<a+(-a)\Rightarrow -a<0$

$a\leq b\wedge c\leq d\Rightarrow a+c\leq b+d$ olduğunu ispatlayalım:

$a\leq b\Rightarrow a=b\vee a<b\Rightarrow a+c=b+c\vee a+c<b+c\Rightarrow a+c\leq b+c$, benzer şekilde,

$c\leq d\Rightarrow c=d\vee c<d\Rightarrow c+b=d+b\vee c+b<d+b\Rightarrow c+b\leq d+b\Rightarrow b+c\leq b+d$. O halde,

$a+c\leq b+c\wedge b+c\leq b+d\Rightarrow a+c\leq b+d$ elde edilir. $a\leq b\wedge c<d\Rightarrow a+c<b+d$ benzer şekilde ispatlanır.

14. $0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < ab$ olduğunu ispatlayalım:

$0 < b$ eşitsizliğinde iki tarafı a ile çarparsak $0 < a$ olduğundan IV_3'e göre eşitsizlik korunur. Buna göre, $a0 < ab \Rightarrow 0 < ab$ elde edilir.

$a < 0 \wedge 0 < b \Rightarrow ab < 0$ olduğunu ispatlayalım:

$a < 0$ eşitsizliğinde iki tarafı b ile çarparsak $0 < b$ olduğundan IV_3'e göre eşitsizlik korunur. Buna göre, $ab < 0b \Rightarrow ab < 0$ elde edilir.

$a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow 0 < ab$ olduğunu ispatlayalım:

$a < 0 \Rightarrow 0 < -a$'dır. $b < 0$ eşitsizliğinde her iki tarafı $-a$ ile çarparsak $0 < -a$ olduğundan IV_3'e göre eşitsizlik korunur. Buna göre, $(-a)b < (-a)0 \Rightarrow -ab < 0 \Rightarrow 0 < ab$ elde edilir.

$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow bc < ac$ olduğunu ispatlayalım:

$c < 0 \Rightarrow 0 < -c$'dir. $a < b$ eşitsizliğinde her iki tarafı $-c$ ile çarparsak $0 < -c$ olduğundan IV_3'e göre eşitsizlik korunur. Buna göre,

$(-c)a < (-c)b \Rightarrow -ac < -bc \Rightarrow -ac + (ac + bc) < -bc + (ac + bc) \Rightarrow bc < ac$ elde edilir.

15. Önce $0 < 1$ olduğunu ispatlayalım. Aksini varsayalım. $1 \leq 0$ olsun. $0 \neq 1$ olduğundan $1 < 0$ olmalıdır. **(14)**'ün son şıkkında $a = 1$, $b = 0$ ve $c = 1$ alınırsa $0 \cdot 1 < 1 \cdot 1 \Rightarrow 0 < 1$ elde edilir. Demek ki varsayımımız yanlıştır. $0 < 1$ olmalıdır.

$0 < a$ keyfi verilsin. Varsayalım ki $a^{-1} < 0$'dır. O halde **(14)**'ün ikinci şıkkına göre $a \cdot a^{-1} < 0 \Rightarrow 1 < 0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Demek ki $0 \leq a^{-1}$'dir. $a^{-1} = 0$ olsaydı $a \cdot a^{-1} = a0 \Rightarrow 1 = 0$ olurdu. Dolayısıyla $0 < a^{-1}$'dir.

16. $0 < a \wedge a < b$ olduğundan $0 < b$ ve **(15)**'ten $0 < b^{-1}$ olduğu açıktır. Şimdi $b^{-1} < a^{-1}$ olduğunu gösterelim:

$0 < a^{-1}$ ve $0 < b^{-1}$ olduğundan **(14)**'ün birinci şıkkına göre $0 < a^{-1}b^{-1}$'dir. $a < b$ eşitsizliğinin iki tarafını $a^{-1}b^{-1}$ ile çarparsak $0 < a^{-1}b^{-1}$ olduğundan IV_3'e göre eşitsizlik korunur. Buna göre, $(a^{-1}b^{-1})a < (a^{-1}b^{-1})b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$ elde edilir.