

## İSPAT:

1. Varsayalım ki 2 tane sıfır elemanı vardır. Bu sıfırları  $0$  ve  $0'$  ile gösterelim.  $O$  halde,

$$\forall x \in \mathbb{R}, x+0 = x \quad (1.1)$$

ve

$$\forall x \in \mathbb{R}, x+0' = x \quad (1.2)$$

(1.1) eşitliği her bir  $x$  elemanı için sağlandığından  $x=0'$  alınabilir. Buna göre (1.1) denklemi

$$0'+0=0'$$

halini alır. Benzer şekilde (1.2) eşitliğinde de  $x=0$  alınırsa bu eşitlik

$$0+0'=0$$

halini alır. Dolayısıyla bu son iki eşitlikten  $0=0'$  elde edilir.

2.  $x \in \mathbb{R}$  keyfi olsun.  $y$  ve  $y'$  elemanları  $x$ 'in toplamaya göre iki tersi olsun.  $O$  halde,  $x+y = x+y' = 0$  olur. Dolayısıyla,

$$y' = y'+0 = y'+(x+y) = (y'+x) + y = 0 + y = y \text{ elde edilir.}$$

3.  $x+a = b$  denkleminde eşitliğin iki tarafına  $-a$  eklenirse

$$(x+a)+(-a) = b+(-a) \Leftrightarrow x+(a+(-a)) = b+(-a) \Leftrightarrow x+0 = b+(-a) \Leftrightarrow x = b+(-a) = b-a \text{ elde edilir. Bu da } x+a = b \text{ denleminin tek çözümünün } b-a \text{ olduğunu gösterir.}$$

4. Varsayalım ki 2 tane birim eleman vardır. Bunları  $1$  ve  $1'$  ile gösterelim.  $O$  halde,

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1 = x \quad (2.1)$$

ve

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1' = x \quad (2.2)$$

(1)'dekine bezer biçimde (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden  $1' \cdot 1 = 1'$  ve  $1 \cdot 1' = 1$  elde edilir. Buradan da  $1' = 1$  olduğu görülür.

5.  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  keyfi olsun.  $b$  ve  $b'$  sayıları  $a$ 'nın çarpmaya göre iki tersi olsun.  $O$  halde  $a \cdot b = a \cdot b' = 1$  olur. Dolayısıyla,

$$b' = b' \cdot 1 = b' \cdot (a \cdot b) = (b' \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b \text{ elde edilir.}$$

6.  $a \cdot x = b$  denkleminde eşitliğin iki tarafı  $a^{-1}$  ile çarpılırsa

$$a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot b \Rightarrow 1 \cdot x = a^{-1} \cdot b \Rightarrow x = a^{-1} \cdot b = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a} \text{ elde edilir. Bu}$$

ise  $a \cdot x = b$  denklemin tek çözümünün  $\frac{b}{a}$  olduğunu gösterir.

7.  $a \in \mathbb{R}$  keyfi olsun.  $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ . Son eşitliğe her iki taraftan  $-a \cdot 0$  eklenirse

$$a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) \Rightarrow 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) \Rightarrow 0 = a \cdot 0 + 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$$

elde edilir.

8.  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $ab = 0$  olsun.  $a \neq 0 \Rightarrow b = 0$  olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü  $a = 0$  ise problem çözülmüş olur.  $a \neq 0$  ise  $b$ 'nin sıfır olduğunu göstermek gereklidir. Şimdi  $a \neq 0 \Rightarrow b = 0$  olduğunu gösterelim:

$a \neq 0$  olduğuna göre  $II_4$ 'e göre  $a^{-1}$  vardır.  $ab = 0$  eşitliğinde iki tarafı  $a^{-1}$  ile çarpalım:

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0 \Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

9.  $a \in \mathbb{R}$  keyfi olsun.  $0a = 0 \Rightarrow (1+(-1))a = 0 \Rightarrow 1a + (-1)a = 0 \Rightarrow a + (-1)a = 0$ . Son eşitliğin iki tarafına  $-a$  eklersek  $(-1)a = -a$  elde edilir.

10. Önce  $-(-a) = a$  olduğunu, yani, bir reel sayının tersinin tersinin kendisine eşit olduğunu ispatlayalım:

$b = -a$  dersek  $a + b = a + (-a) = 0$  olduğundan  $a$  sayısı  $b$ 'nin toplamaya göre tersidir. Yani

$a = -b = -(-a)$  elde edilir. Buna göre (9)'dan,

$$(-1)(-a) = -(-a) = a.$$

$$11. a \in \mathbb{R} \Rightarrow (-a)(-a) = ((-1)a)((-1)a) = (-1)(-1)aa = 1aa = aa = a^2$$

$$12. a < b \wedge b \leq c \Rightarrow a < b \wedge (b = c \vee b < c) \Rightarrow (a < b \wedge b = c) \vee (a < b \wedge b < c)$$

$\Rightarrow a < c \vee a < c \Rightarrow a < c$  elde edilir.  $a \leq b \wedge b < c \Rightarrow a < c$  ve  $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$  benzer biçimde ispatlanır.

13.  $0 < a$  keyfi olsun.  $IV_2$  ile eşitsizliğin iki tarafına  $-a$  ekleyebiliriz.

$$(-a) + 0 < a + (-a) \Rightarrow -a < 0$$

$a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$  olduğunu ispatlayalım:

$a \leq b \Rightarrow a = b \vee a < b \Rightarrow a + c = b + c \vee a + c < b + c \Rightarrow a + c \leq b + c$ , benzer şekilde,

$c \leq d \Rightarrow c = d \vee c < d \Rightarrow c + b = d + b \vee c + b < d + b \Rightarrow c + b \leq d + b \Rightarrow b + c \leq b + d$ . O halde,

$a + c \leq b + c \wedge b + c \leq b + d \Rightarrow a + c \leq b + d$  elde edilir.  $a \leq b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$  benzer şekilde ispatlanır.

**14.**  $0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < ab$  olduğunu ispatlayalım:

$0 < b$  eşitsizliğinde iki tarafı  $a$  ile çarparsak  $0 < a$  olduğundan  $IV_3$ 'e göre eşitsizlik korunur.

Buna göre,  $a0 < ab \Rightarrow 0 < ab$  elde edilir.

$a < 0 \wedge 0 < b \Rightarrow ab < 0$  olduğunu ispatlayalım:

$a < 0$  eşitsizliğinde iki tarafı  $b$  ile çarparsak  $0 < b$  olduğundan  $IV_3$ 'e göre eşitsizlik korunur.

Buna göre,  $ab < 0b \Rightarrow ab < 0$  elde edilir.

$a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow 0 < ab$  olduğunu ispatlayalım:

$a < 0 \Rightarrow 0 < -a$ 'dır.  $b < 0$  eşitsizliğinde her iki tarafı  $-a$  ile çarparsak  $0 < -a$  olduğundan  $IV_3$ 'e göre eşitsizlik korunur. Buna göre,  $(-a)b < (-a)0 \Rightarrow -ab < 0 \Rightarrow 0 < ab$  elde edilir.

$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow bc < ac$  olduğunu ispatlayalım:

$c < 0 \Rightarrow 0 < -c$ 'dir.  $a < b$  eşitsizliğinde her iki tarafı  $-c$  ile çarparsak  $0 < -c$  olduğundan  $IV_3$ 'e göre eşitsizlik korunur. Buna göre,

$(-c)a < (-c)b \Rightarrow -ac < -bc \Rightarrow -ac + (ac + bc) < -bc + (ac + bc) \Rightarrow bc < ac$  elde edilir.

**15.** Önce  $0 < 1$  olduğunu ispatlayalım. Aksini varsayalım.  $1 \leq 0$  olsun.  $0 \neq 1$  olduğundan  $1 < 0$  olmalıdır. **(14)**'ün son şikkında  $a=1$ ,  $b=0$  ve  $c=1$  alınırsa  $0 \cdot 1 < 1 \cdot 1 \Rightarrow 0 < 1$  elde edilir. Demek ki varsayımımız yanlıştır.  $0 < 1$  olmalıdır.

$0 < a$  keyfi verilsin. Varsayalım ki  $a^{-1} < 0$ 'dır. O halde **(14)**'ün ikinci şikkına göre  $a \cdot a^{-1} < 0 \Rightarrow 1 < 0$  elde edilir. Bu ise çelişkidir. Demek ki  $0 \leq a^{-1}$ 'dir.  $a^{-1} = 0$  olsaydı  $a \cdot a^{-1} = a0 \Rightarrow 1 = 0$  olurdu. Dolayısıyla  $0 < a^{-1}$ 'dir.

**16.**  $0 < a \wedge a < b$  olduğundan  $0 < b$  ve **(15)**'ten  $0 < b^{-1}$  olduğu açıktır. Şimdi  $b^{-1} < a^{-1}$  olduğunu gösterelim:

$0 < a^{-1}$  ve  $0 < b^{-1}$  olduğundan **(14)**'ün birinci şikkına göre  $0 < a^{-1}b^{-1}$ 'dir.  $a < b$  eşitsizliğinin iki tarafını  $a^{-1}b^{-1}$  ile çarparsak  $0 < a^{-1}b^{-1}$  olduğundan  $IV_3$ 'e göre eşitsizlik korunur. Buna göre,  $(a^{-1}b^{-1})a < (a^{-1}b^{-1})b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$  elde edilir.