

İSPAT:

a) $f, g \in G$ olsun. O halde f ve g , 1-1 ve örtendir. Önerme 9-(i)-(ii) ile $g \circ f$ de 1-1 ve örtendir. Buna göre $g \circ f \in G$, yani kapalılık sağlanır.

b) Önerme 8 ile $\forall f, g, h \in G$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ olduğundan birleşme özelliği sağlanır.

c) Önerme 7 ile $\forall f \in G$, $f \circ I_x = I_x \circ f = f$ ve $I_x \in G$ olduğundan G , I_x birim elemanıdır.

d) G 'nin elemanları 1-1 ve örten olduğundan Önerme 12 ile $\forall f \in G$, $\exists f^{-1} \in G$: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_x$ 'tir. Yani her elemanın tersi vardır. G 'nin grup olduğu ispatlandı.

Şimdi, G 'nin değişmeli olması için gerek ve yeter koşulun $|X| \leq 2$ olduğunu ispatlayalım.

Yeterlilik: $|X| \leq 2$ olsun. O halde X ya 1 ya da 2 elemanıdır.

$|X|=1$ ise $X = \{a\}$ biçimindedir. Bu durumda $\{a\}$ 'dan $\{a\}$ 'ya tek bir fonksiyon vardır. O da X 'in birim fonksiyonu olan I_x 'tir. Buna göre $G = \{I_x\}$ olur. Tek elemanlı her grup değişmeli olduğundan G değişmelidir.

$|X|=2$ ise $X = \{a, b\}$ biçimindedir. $\{a, b\}$ 'den $\{a, b\}$ 'ye iki tane 1-1 örten fonksiyon vardır. Biri I_x diğeri ise $f_0 = \{(a, b), (b, a)\}$ 'dir. (Yani f_0 , $f_0(a) = b$ ve $f_0(b) = a$ olan fonksiyondur) Buna göre $G = \{I_x, f_0\}$ olur. İki elemanlı her grup değişmeli olduğundan G değişmelidir.

Gereklilik: $|X| > 2$ olsun. G 'nin değişmeli olmadığını gösterelim. $|X| > 2$ ise X 'in en az 3 farklı elemanı vardır. Bu 3 farklı elemanı a , b ve c ile gösterelim. $f, g: X \rightarrow X$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$f(x) = \begin{cases} b, & x = a \\ c, & x = b \\ a, & x = c \\ x, & x \in X \setminus \{a, b, c\} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} a, & x = a \\ c, & x = b \\ b, & x = c \\ x, & x \in X \setminus \{a, b, c\} \end{cases}$$

Açıktır ki f ve g 1-1 ve örtendir. Dolayısıyla $f, g \in G$ 'dir.

$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(c) = b$ ve $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = a$, yani,

$(g \circ f)(b) \neq (f \circ g)(b)$ olduğundan $g \circ f \neq f \circ g$, dolayısıyla G değişmeli değildir.